Surfaces, triangles et champs de vecteurs

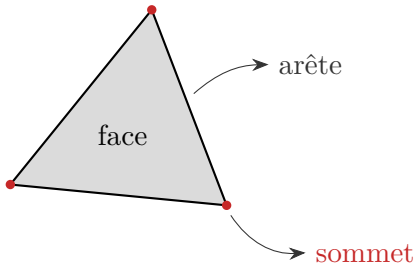
Julio Sampietro Christ

Club Math, Université de Montréal
4 novembre 2026

Avertissement. Ces notes accompagnent un exposé au Club Math. Elles ont été transcrites presque fidèlement, avec l'aide d'un assistant IA, à partir de mes notes manuscrites : seules les coquilles et les fautes de frappe ont été corrigées, et les figures ont été redessinées. Elles gardent donc le ton informel d'un exposé au tableau, et certains arguments n'y sont qu'esquissés.

1 Polyèdres, triangles et caractéristique d'Euler

On commence par le concept suivant.



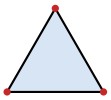
Par un *polyèdre triangulé*, on va comprendre un polyèdre dont les faces sont des triangles.

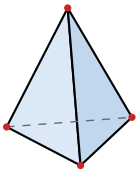
Définition 1. Pour un polyèdre triangulé P, on définit sa *caractéristique d'Euler* comme

$$\chi(P) = V - E + F,$$

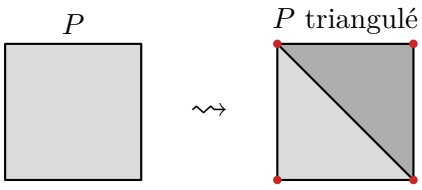
où V est le nombre de sommets, E le nombre d'arêtes et F le nombre de faces.

Exemples.

1)  $V = 3$, $E = 3$, $F = 1$ $\rightsquigarrow$ $\chi(P) = 3 - 3 + 1 = 1$.

2)  $V = 4$, $E = 6$, $F = 4$ $\rightsquigarrow$ $\chi(P) = 4 - 6 + 4 = 2$.

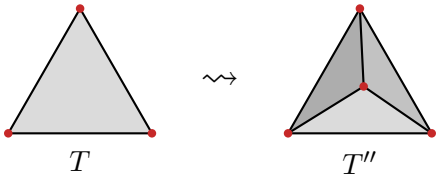
On peut étendre notre définition à des polyèdres aussi ! Étant donné un polygone P, on peut toujours trouver une division de P en triangles :



Mais, si je choisis une division T de P en triangles, et que quelqu'un d'autre choisit une division T', comment je sais qu'on obtient *le même* χ ?

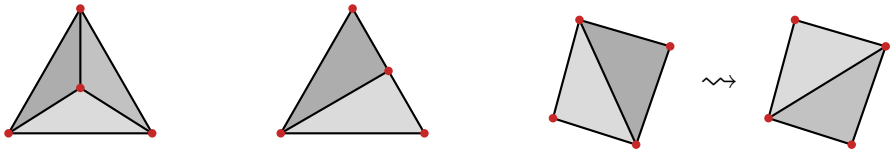
Théorème 1 (Difficile)**.** *Si on divise P en T et en T', il existe une troisième subdivision T'' qui raffine T et T' en même temps.*

Ici, on dit que T'' *raffine* T si tout triangle de T est une union de triangles de T'' :



Proposition 1. *Si T'' raffine T, alors $\chi_T(P) = \chi_{T''}(P)$.*

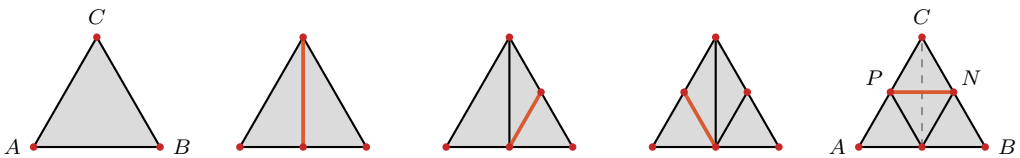
Démonstration. Il suffit de le calculer pour un seul triangle. On le fait par récurrence sur le nombre n d'opérations nécessaires pour passer de T à T''. Si $n = 1$, alors trois cas sont possibles :



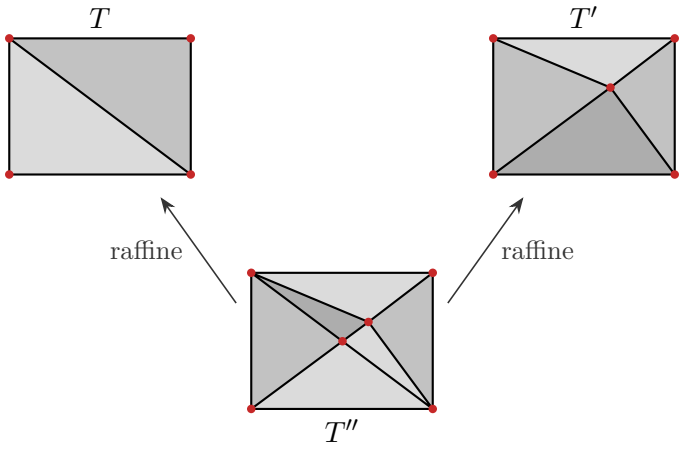
(1) $\chi = 4 - 6 + 3 = 1$ (2) $\chi = 4 - 5 + 2 = 1$ (3) *flip* $\chi = 4 - 5 + 2 = 1$ avant et après

Donc c'est bon. Le cas $n+1$ est immédiat : pour passer de n à $n+1$, j'ai dû faire l'un des trois cas précédents ! □

Remarque. Pour voir la nécessité de l'opération *flip*, on observe que passer de l'avant-dernière étape à la dernière dans la séquence suivante ne peut pas se faire avec les opérations (1) et (2) :

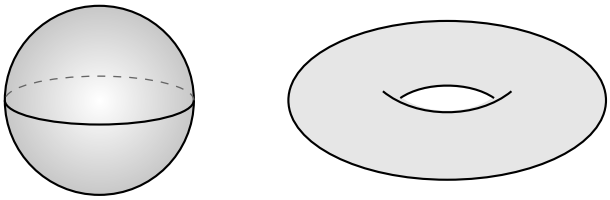


On peut faire un dessin :



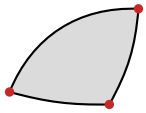
Ainsi, $\chi(P)$ est bien définie pour tout polyèdre. On peut aller un peu plus loin…
Soit S une *surface* lisse compacte.

Exemple.



La sphère, S^2 Le tore, $\mathbb{T}$

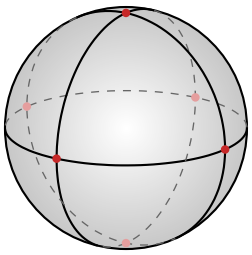
Alors on peut trouver une « triangulation » de S… C'est plus ou moins la même chose, sauf qu'on a des triangles souples :



Mais tout marche pareil : on peut définir $\chi(S)$.

Proposition 2. $\chi(S^2) = 2$.

Démonstration. On peut trianguler S^2 :



$\chi = 6 - 12 + 8 = 2.$

□

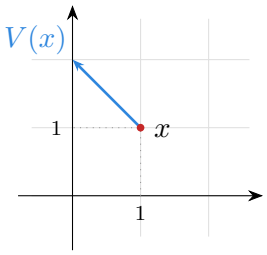
Proposition 3. $\chi(\mathbb{T}) = 0$.

2 Champs de vecteurs, indice

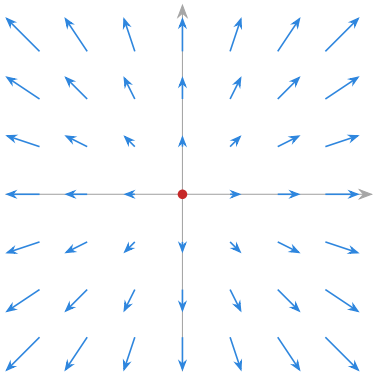
Soit S une surface lisse compacte. *Localement*, S est « comme » le plan $\mathbb{R}^2$.
Un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ peut être pensé comme une application lisse

$$V\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

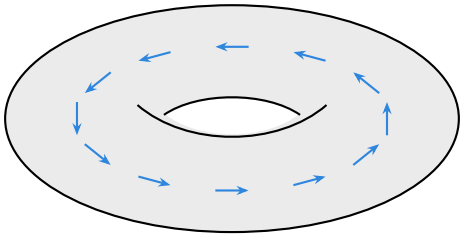
On dessine V comme suit : pour chaque $x \in \mathbb{R}^2$, $V(x) \in \mathbb{R}^2$ est dessiné comme une flèche avec l'origine en x. Par exemple, si $x = (1, 1)$ et $V(x) = (-1, 1)$, on dessine



Si on dessine toutes les flèches en même temps, on obtient une image comme celle-ci (ici pour $V(x, y) = (x, y)$) :



Un *champ de vecteurs* sur S associe à chaque point $s \in S$ un « vecteur tangent ». Localement, un champ de vecteurs obéit à la description précédente.



Un *zéro* de V est un point $s \in S$ tel que $V(s) = 0$. Donc, localement, il s'agit littéralement d'un point $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $V(x) = 0$.

Un zéro est *isolé* s'il existe une petite boule autour de s telle qu'il n'y ait pas d'autres zéros dans cette boule.

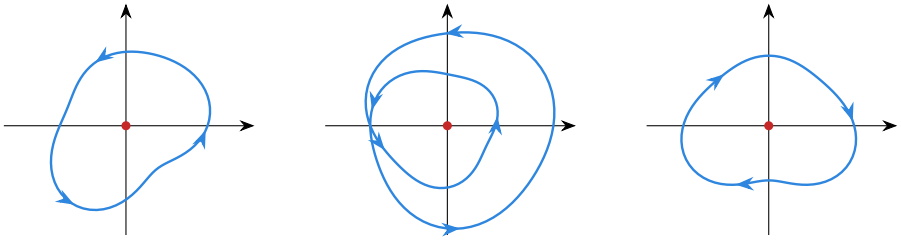
Pour un tel zéro, on va associer un *indice* comme suit. Localement, si $0 \in \mathbb{R}^2$ et $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont tels que $V(0) = 0$ et que c'est un zéro isolé, on choisit une petite boule $B_\varepsilon(0)$ autour de zéro, avec bord $S_\varepsilon(0)$. On obtient une application

$$V\big|_{S_\varepsilon(0)}\colon S_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

donc une courbe fermée qui ne passe pas par zéro.

Si $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ est une courbe qui ne passe pas par zéro, *l'indice de γ autour de zéro* est le nombre de tours orientés que fait la courbe. On le note $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$.

Exemples.



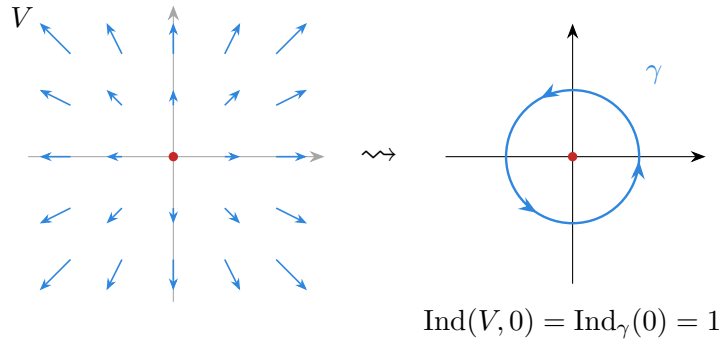
1 tour
$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 1$

2 tours
$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 2$

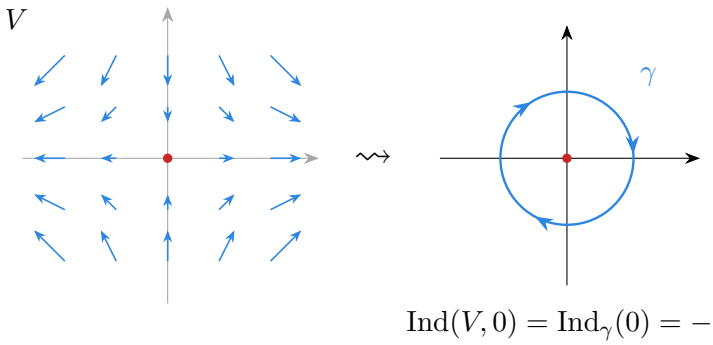
1 tour « à l'envers »
$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = -1$

Ainsi, on définit $\mathrm{Ind}(V, 0)$ comme l'indice de $\gamma = V\big|_{S_\varepsilon(0)} : S_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}^2$.

Exemples.



$\mathrm{Ind}(V, 0) = \mathrm{Ind}_\gamma(0) = 1$



$\mathrm{Ind}(V, 0) = \mathrm{Ind}_\gamma(0) = -1$

Cette définition est *locale* et ne dépend pas des choix faits.

Ainsi, pour tout champ de vecteurs V sur S et pour chaque zéro isolé $s \in S$, on peut parler de $\mathrm{Ind}(V, s)$. Si tous les zéros sont isolés, on définit

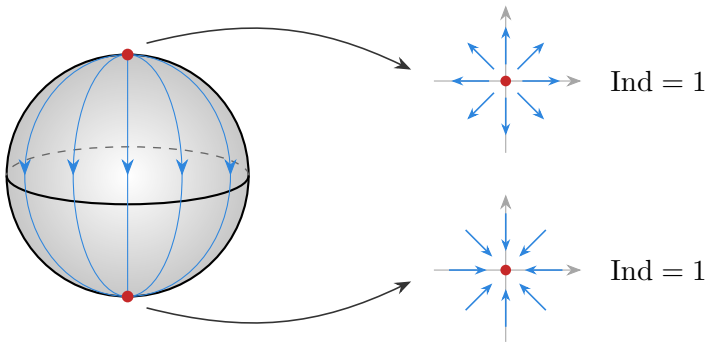
$$\mathrm{Ind}(V) = \sum_{s \text{ zéro de } V} \mathrm{Ind}(V, s).$$

Théorème 2 (Poincaré–Hopf)**.** *Pour tout V avec des zéros isolés,*

$$\mathrm{Ind}(V) = \chi(S).$$

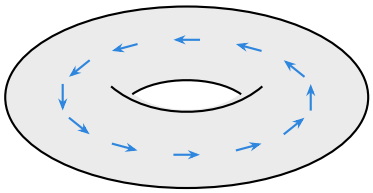
On montre deux exemples.

1) Sur la sphère S^2, on prend le champ qui « coule » du pôle nord vers le pôle sud :



On trouve $1 + 1 = 2 = \chi(S^2)$.

2) Sur le tore $\mathbb{T}$, on prend le champ dessiné plus haut :

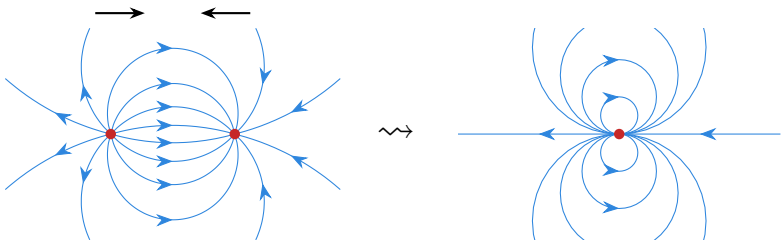


Pas de zéros, donc $\mathrm{Ind}(V) = 0 = \chi(\mathbb{T})$.

On esquisse la démonstration du théorème en deux étapes :

1. En réalité, $\mathrm{Ind}(V)$ ne *dépend pas de* V.
2. On construit un exemple à la main tel que $\mathrm{Ind}(V) = \chi(S)$.

Pour 1, on fait plus ou moins comme suit. Si V, V' ont des zéros isolés, on peut *déformer* V en V' de telle sorte que, lorsqu'on regarde les zéros, on a au plus la situation où deux zéros fusionnent en un seul, qui peut même disparaître (ou l'inverse !). Alors on montre que le nouveau zéro a pour indice la somme des indices des deux autres :

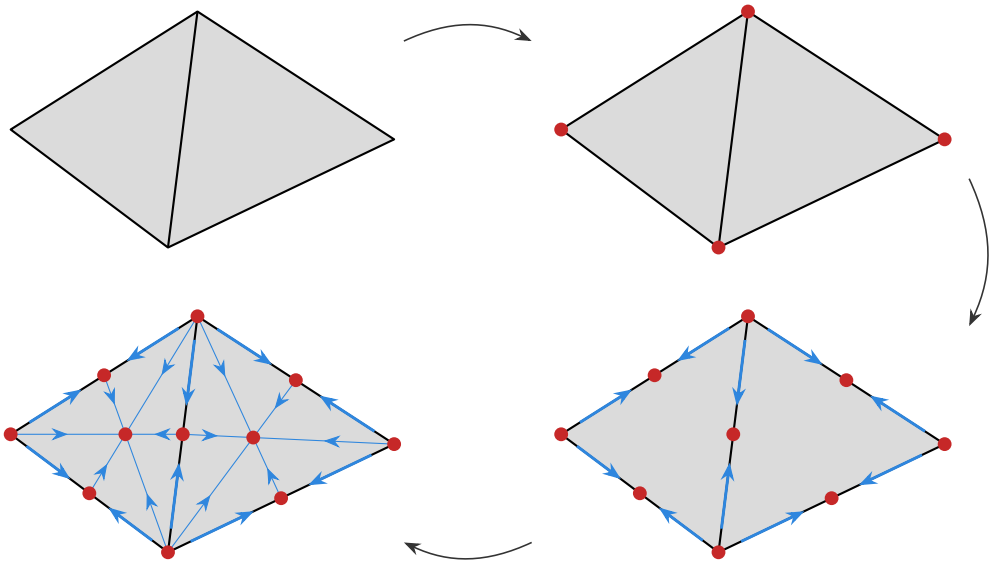


L'argument est par déformation des courbes dans la définition de l'indice. Alors

$$\sum_{s \in \text{zéros}(V)} \mathrm{Ind}(V, s) = \sum_{s' \in \text{zéros}(V')} \mathrm{Ind}(V', s').$$

Pour construire un exemple de 2, on choisit une triangulation T de S. Pour chaque triangle :

1) les sommets sont des zéros ;
2) le centre de chaque arête est un zéro, et V pointe vers ce centre le long de l'arête ;
3) le centre de chaque face est un zéro, et V pointe vers le centre.



Pour chaque sommet, on a un zéro d'indice 1.
Pour chaque arête, on a un zéro d'indice -1.
Pour chaque face, on a un zéro d'indice 1.

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Ind}(V) = V - E + F = \chi(S).$$

Corollaire 1 (Théorème de la boule poilue)**.** *Tout champ de vecteurs sur S^2 a au moins un zéro !*